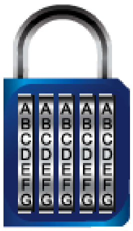
Questão 24

Observe três modelos de cadeados, com as respectivas instruções e recomendações de registro da senha de abertura dos cadeados:

CADEADO 1

Cada um dos 4 cilindros contém algarismos de 0 a 9. Seleciona-se um algarismo em cada um dos 4 cilindros, sendo permitido repetir algarismos. Não se recomenda o uso do dia e mês de nascimento como senha.



CADEADO 2

Cada cilindro contém 26 letras distintas. Seleciona-se uma letra em cada um dos 5 cilindros, não sendo possível escolher letras repetidas.

CADEADO 3

Digitam-se 6 algarismos dentre os 8 botões, não podendo repetir mais do que três vezes qualquer algarismo digitado.

a) Calcule o número de possibilidades de senhas distintas dos cadeados 1 e 2, seguindo as instruções e recomendações dos fabricantes. No caso do cadeado 2, sua resposta pode ser dada na forma fatorial $\frac{x!}{y!}$, sem necessidade de conta.

b) Calcule o número de possibilidades de senhas distintas do cadeado 3, seguindo as instruções do fabricante.

RESOLUÇÃO

a) No caso do cadeado 1, como é permitido repetir algarismos, temos 10 opções para cada um dos 4 cilindros. Assim, teríamos:

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10.000 \text{ senhas}$$

Entretanto, levando em consideração a recomendação de não se usar a data de nascimento, devemos retirar uma possibilidade. Ficamos então com:

$$10.000 - 1 = \boxed{9.999 \text{ senhas}}$$

No caso do cadeado 2, devemos escolher uma letra, dentre as 26 possíveis, para cada um dos 5 cilindros, porém não podendo repetir letra. Assim, temos:

$$26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \text{ senhas}$$

Para deixar essa conta indicada na notação sugerida, multiplicando e dividindo por $21!$, ficamos com:

$$\frac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21!}{21!} = \boxed{\frac{26!}{21!} \text{ senhas}}$$

b) Temos 8 opções para a escolha de cada um dos 6 algarismos. Se não houvesse restrição, teríamos:

$$8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^6 = 262.144 \text{ senhas}$$

Entretanto, como não se pode repetir nenhum algarismo mais do que 3 vezes, devemos retirar os casos em que algum algarismo foi usado 4, 5 ou 6 vezes.

(I) No caso em que 1 algarismo foi usado 4 vezes, devemos:

- **Escolher qual algarismo será repetido: 8 opções;**
- **Escolher quais as 4 posições esse algarismo ocupará:** $\binom{6}{4} = \frac{6 \cdot 5}{2!} = 15$ **opções.**
- **Escolher um algarismo, dentre os 7 restantes, para cada uma das 2 posições ainda não ocupadas, podendo haver repetição entre eles:** $7 \cdot 7 = 49$ **opções.**

(II) No caso em que 1 algarismo foi usado 5 vezes, devemos:

- **Escolher qual algarismo será repetido: 8 opções;**
- **Escolher qual a posição não será ocupada por esse algarismo: 6 opções;**
- **Escolher o algarismo, dentre os 7 restantes, para a posição ainda não ocupada: 7 opções**

(III) No caso em que 1 algarismo foi usado 6 vezes, devemos apenas escolher qual algarismo será repetido: 8 opções.

Assim, o total de senhas que respeitam a restrição imposta é dado por:

$$\mathbf{8^6 - 8 \cdot 15 \cdot 49 - 8 \cdot 6 \cdot 7 - 8 = 262.144 - 5.880 - 336 - 8 = \boxed{255.920 \text{ senhas}}}$$