

Questão 06

6. Sejam b e d números positivos distintos de 1 e considere o sistema linear nas variáveis x e y :

$$(\log_b 2)x + (\log_4 b)y = k$$

$$(\log_d 4)x + (\log_2 d)y = 0$$

a) Para $k = 1$, $b = 2$ e $d = 4$, determine x e y .

b) Para $k = 0$, determine para quais valores de b e d o sistema admite infinitas soluções.

RESOLUÇÃO

a) Sabemos que $b \neq 1$ e $d \neq 1$. Do enunciado, para $k = 1$, $b = 2$, $d = 4$:

$$\begin{cases} x \cdot \log_2 2 + y \cdot \log_4 2 = 1 \\ x \cdot \log_4 4 + y \cdot \log_2 4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 1 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \xrightarrow{x \cdot (-1)} \begin{cases} -x - \frac{1}{2}y = -1 \\ x + 2y = 0 \end{cases}, \text{ somando as duas linhas: } \frac{3}{2}y = -1.$$

$$\text{Portanto, } x = \frac{4}{3} \text{ e } y = \frac{-2}{3}.$$

$$\text{b) } \begin{cases} x \cdot \log_b 2 + y \cdot \log_4 b = 0 \\ x \cdot \log_d 4 + y \cdot \log_2 d = 0 \end{cases}$$

O sistema admite infinitas soluções quando $\text{Det}(A) = 0$. Daí,

$$\begin{vmatrix} \log_b 2 & \log_4 b \\ \log_d 4 & \log_2 d \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -\log_4 b * \log_d 4 + \log_b 2 * \log_2 d = 0 \rightarrow -\frac{\log b}{\log 4} * \frac{\log 4}{\log d} + \frac{\log 2}{\log b} * \frac{\log d}{\log 2} = 0$$

$$\rightarrow \log_d b + \log_b d = 0 \rightarrow -\log_d b + \frac{1}{\log_d b} = 0 \rightarrow -(\log_d b)^2 + 1 = 0 \rightarrow \log_d b = \pm 1 \rightarrow b = \frac{1}{d} \text{ ou } b = d.$$

Logo, $b > 0$ e $b \neq 1$, $d > 0$ e $d \neq 1$ tais que $b = \frac{1}{d}$ ou $b = d$.