Questão 08

Por volta de 1845, o matemático belga Pierre Verhulst começou a estudar um tipo de função que hoje é conhecida como função logística. Originalmente utilizada para modelar problemas envolvendo crescimento populacional, atualmente tem muitas outras aplicações em ecologia, biomatemática, sociologia e ciências políticas.

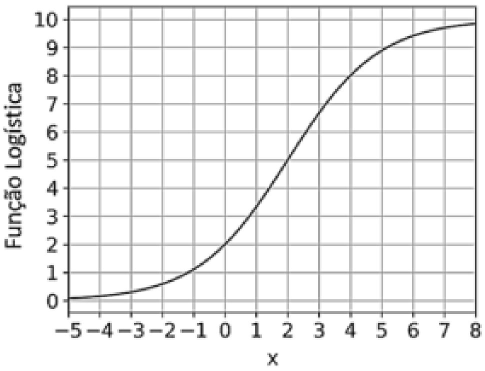
Uma função logística pode ser definida por

$$f(x) = \frac{L}{1 + 2^{-k(x-x_0)}}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

em que $k > 0$, $L > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}$.

a) Seja f^{-1} a função inversa de f. Determine a expressão e o domínio de f^{-1}.

b) O gráfico abaixo é de uma função logística com $L = 10$. Determine os valores de x_0 e k.



RESPOSTA

a)

Sendo a função y = f(x) = $\frac{L}{1+2^{-k(x-x_0)}}$, para obter a função inversa da função dada devemos substituir a função y por x e x por y :

x = $\frac{L}{1+2^{-k(y-x_0)}}$ => $(1+2^{-k(y-x_0)})$.x = L => x +x.$2^{-k(y-x_0)} = L$ => x.$2^{-k(y-x_0)}$= L − x => $2^{-k(y-x_0)}$ = $\frac{L-x}{x}$ => $\left(\frac{1}{2}\right)^{k(y-x_0)}$ = $\frac{L-x}{x}$

= > $k(y - y_0)$=$\log_{\frac{1}{2}}\frac{L-x}{x}$ => ky - ky_0 = $\log_{\frac{1}{2}}\frac{L-x}{x}$ => ky = $\log_{\frac{1}{2}}\frac{L-x}{x}$ + ky_0 => y = $\frac{1}{k}\log_{\frac{1}{2}}\frac{L-x}{x}$ + y_0

Portanto , a função inversa $f^{-1}(x) = \frac{1}{k}\log_{\frac{1}{2}}(\frac{L-x}{x})$ + y_0

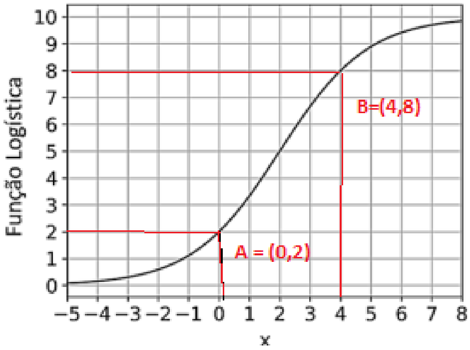
O domínio da função será quando $\frac{L-x}{x} > 0$, então :

$\frac{L}{x} - 1 > 0$ => $\frac{L}{x} > 1$ $=> \frac{x}{L} < 1$ => x < L .

Como x > 0 e x < L , temos que 0 < x < L:

Portanto , o domínio da função é $D_{f^{-1}} = \{x \in \mathbb{R} / 0 < x < L\}$

b)



Sabendo que L = 10 e considerando os pontos A=(0,2) e B=(4,8) , temos que :

com o ponto A=(0,2) , obtemos :

y = f(x) = $\frac{L}{1+2^{-k(x-x_0)}}$ => 2 = $\frac{10}{1+2^{-k(0-x_0)}}$ => $2(1 + 2^{-k(-x_0)})$=10 => 2+ 2.2^{kx_0} = 10 => 2. 2^{kx_0} = 8 => $2^{kx_0} = 4$

=> $2^{kx_0} = 2^2$ => kx_0 = 2

com o ponto B=(4,8) , obtemos:

y = f(x) = $\frac{L}{1+2^{-k(x-x_0)}}$ => 8 = $\frac{10}{1+2^{-k(4-x_0)}}$ => $8(1 + 2^{-k(4-x_0)})$=10 => $8 + 8.2^{-k(4-x_0)}$ = 10 => 8 . $2^{-k(4-x_0)}$ = 2

=> $2^{-k(4-x_0)}$= $\frac{1}{4}$ =>

$2^{-k(4-x_0)}$= 2^{-2} => -k (4 -x_0) = -2 => k(4 -x_0) = 2 4k - kx_0 = 2 => 4k – 2 = 2 => 4k = 4 => k = 1

Se k = 1 e kx_0 = 2 , então x_0 = 2

Portanto, quando L = 10 , temos que k =1 e x_0 =2.