

Questão 20

Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 3 & k^2 \end{pmatrix}$$

e seja $B = A + A^T$, onde A^T é a transposta da matriz A .

Sobre o sistema

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2021 \\ 2022 \end{pmatrix}$$

é correto afirmar que:

- a) se $k = 0$, o sistema não tem solução.
- b) se $k = -1$, o sistema tem infinitas soluções.
- c) se $k = -1$, o sistema não tem solução.
- d) se $k = 3$, o sistema tem infinitas soluções.

ALTERNATIVA C

Sendo a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 3 & k^2 \end{pmatrix}$ a sua transposta é $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ k & k^2 \end{pmatrix}$ e somando as duas matrizes para obter a matriz $B = A + A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3+k \\ 3+k & 2k^2 \end{pmatrix}$

Para que o sistema abaixo seja um Sistema Possível e Determinado é necessário que o $\det B \neq 0$

Então ,

$$\begin{vmatrix} 2 & 3+k \\ 3+k & 2k^2 \end{vmatrix} = 4k^2 - (3+k)^2 = 4k^2 - (9 + 6k + k^2) = 4k^2 - 9 - 6k - k^2 = 3k^2 - 6k - 9 \neq 0$$

podemos dividir por 3 e temos a desigualdade :

$k^2 - 2k - 3 \neq 0$ e daí , temos que $k \neq 3$ e $k \neq -1$ (o sistema será SPD) quando $k = 3$:

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2021 \\ 2022 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2021 \\ 2022 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 6y = 2021 \\ 6x + 18y = 2022 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 6y = 2021(\text{div } 2) \\ 6x + 18y = 2022(\text{div } 6) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y = \frac{2021}{2} \\ x + 3y = 337 \end{cases}$$

O sistema obtido é impossível, pois temos expressões iguais com resultados diferentes quando $k = -1$

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2021 \\ 2022 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2021 \\ 2022 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 2021 \\ 2x + 2y = 2022 \end{cases}, \text{ temos a mesma situação}$$

quando $k = 3$, então o sistema é impossível também , ou seja , não tem solução.